FÍSICA

Tecnociencia 2005, Vol. 7, N° 2.

# SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DEL TIPO PARABÓLICO MEDIANTE MÉTODOS NUMÉRICOS

**Gustavo Jesús Bracho Rodríguez**
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Física.
e-mail: gbracho@bol.com.br

## RESUMEN
El estudio de las ecuaciones de transporte, particularmente, las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) del tipo parabólicas de naturaleza lineal, es tal vez uno de los aspectos más importantes en el campo de la Física – Matemática. Se presenta una comparación de los resultados analíticos con los numéricos mediante la utilización de poderosos métodos de solución numérica escritos en los lenguajes Fortran 90 y C++. La solución analítica al problema planteado es obtenida mediante la utilización de la transformada de Laplace, en vez del método de separación de variables.

## PALABRAS CLAVES
Ecuaciones diferenciales parciales, transformada de Laplace, ecuación de conducción del calor, método explícito, método implícito, método de Crank – Nicholson.

## ABSTRACT
The study of transport equations, particularly, the differentials parabolic partial equation of lineal nature, is perhaps a highly important aspects in the field of the mathematical physics. A comparison of the analytical results with numerical by means of a the use of powerful methods of numerical solutions appears to a classic problem, as is it the conduction of the heat in materials. If simulations were carried out by means of the elaborations of a program written in the languages Fortran 90 and C++. The analytical solutions to the created problem is obtained by means of the use of Laplace transformed instead of the traditional method of separation of variables.

**KEYWORDS**
Partials differentials equations, laplace transformation, heat conduction, explicit method, implicit method, Crank-Nicholson method.

## INTRODUCCIÓN

Muchos problemas fundamentales en ciencias, ingeniería, y otras áreas como la economía, se describen mediante ecuaciones diferenciales. Estamos concientes que muchos problemas de tecnologías futuras también serán descritos por medio de ecuaciones diferenciales, ya sean ordinarias o parciales. Los problemas físicos han motivado el desarrollo de parte de las matemáticas y esto es especialmente cierto cuando se trata de ecuaciones diferenciales. En Física – Matemática, el estudio de las ecuaciones de transporte, son considerados tres aspectos de fundamental importancia. Son ellos: (Campbell & Haberman 1998).

**Proceso de modelado.** En este aspecto, los objetos físicos se describen por medio de leyes físicas y formulaciones matemáticas dadas. Debido a que gran grado de las leyes físicas involucran tasas de cambios (transporte de partículas de cualquier naturaleza). Con frecuencia, el lenguaje natural en las ciencias e ingeniería es el de las ecuaciones diferenciales en general.

**Análisis.** Este aspecto abarca una investigación completa de las EDP y sus soluciones, incluyendo detallados estudios numéricos.

**Interpretación.** Toda solución numérica, particularmente de una EDP, no completa el proceso global sin la consideración de este aspecto. Es decir, debe darse la interpretación de la solución de la EDP, en el contexto del problema físico general, y debe analizarse más detalladamente sus implicaciones.

En el presente artículo, resultado de un proyecto de investigación, desarrollado por el autor, realiza un abordaje numérico de las ecuaciones de transporte del tipo parabólicos, particularmente aquella que describe la conducción del calor en medios materiales homogéneos, sin hacer énfasis en su rigor matemático. De igual manera, se presenta una discusión de sus resultados tanto analíticos como numéricos, mediante la utilización de poderosas técnicas de solución numéricas de EDP del tipo el parabólico como son, el método de aproximaciones sucesivas, el método implícito y el método explícito entre otros (Nakamura 1992; Smith 1978; Burden & Faires 1998).

Cuando se tiene una EDP, se intenta obtener cierto tipo de información. Existen cuatro enfoque generales, además de los tres aspectos presentados anteriormente para el adecuado análisis de las EDP; son estos enfoques, el **Cualitativo**, **Numérico**, **Analítico** y **Asintótico** o **Perturbativo** (Campbell & Haberman 1998).

## METODOLOGÍA

Una EDP es una ecuación que contiene una función desconocida de una o más variables y sus derivadas parciales respecto a estas variables. La EDP lineal de orden dos en dos variables independientes toma la forma (Spiegel 1979).

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + Fu = G\,, \qquad (1)$$

donde *A, B, ..., G,* pueden depender de $x$ y $y$ pero no de $u$. Por razón de la naturaleza de las soluciones de la Ec.(1), las EDP se califican frecuentemente como elíptica, parabólica e hiperbólica, según el valor del discrimante $B^2 - 4AC$, es decir (Godunov 1984)

$B^2 - 4AC < 0$ EDP del tipo elíptica

$B^2 - 4AC = 0$ EDP del tipo parabólica

$B^2 - 4AC > 0$ EDP del tipo hiperbólica

Las EDP del tipo parabólico se obtienen al investigar fenómenos tales como la conductividad térmica, difusión de partículas, propagación del campo electromagnético en medios conductores (Budak et al., 1984), el movimiento de un líquido viscoso (Fox & McDonald 1983) y el curso de las aguas subterráneas (Franco 1995) entre otros aspectos.

Una de las situaciones clásicas en las que intervienen EDP parabólicas, es en la teoría de conducción del calor.

Para ilustrar nuestra visión, consideremos una barra metálica cuya superficie está aislada. La barra tiene una longitud $l$ y una difusividad κ y está perfectamente aislada lateralmente, de modo que el calor fluye únicamente en la dirección $x$. Si sus extremos se mantiene a una temperatura $T$ = 0, y su temperatura inicial está dada por ejemplo, $u(x,0)=10\sin(2\pi x)-6\sin(4\pi x)$, tal como se ilustra en la Fig. 1.

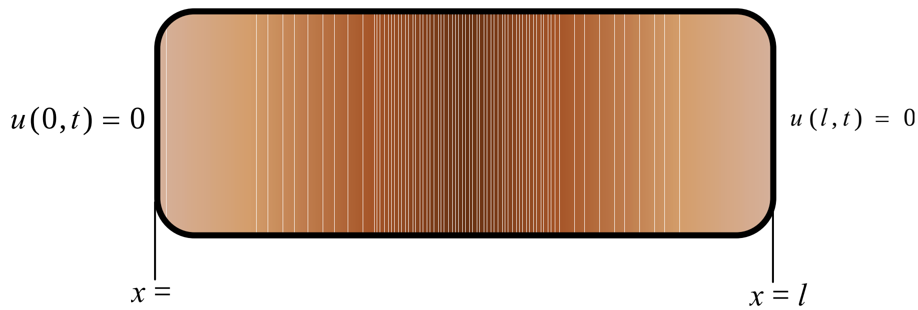


Fig. 1. Condiciones en la frontera para una barra metálica de longitud $l$.

Si consideramos que la longitud y la difusividad de la barra sean de 3,0 y 4,0 unidades respectivamente, vemos que la ecuación a resolver es la ecuación de conducción del calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=4{,}0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad 0<x<3{,}0\,, \tag{2}$$

con condiciones en la frontera y cota dadas por Bracho (2003)

$$u(0,t)=u(3{,}0,t)=0;\ u(x,0)=10\sin(2{,}0\pi x)-6{,}0\sin(4{,}0\pi x);\quad |u(x,t)|<M$$

Apliquemos el método de la transformada de Laplace (Spiegel 1990), a la Ec.(2) con respecto a $t$, vemos que

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt=\int_0^\infty e^{-st}\left(4{,}0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dt\,,$$

puede ser escrita como

$$s\int_0^\infty e^{-st}udt - u(x,0) = 4{,}0\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}udt\ ,$$

es decir

$$sU - u(x,0) = 4{,}0\frac{d^2U}{dx^2}, \qquad (3)$$

donde;

$$U = U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st}udt\ .$$

Al aplicar la condición inicial en la Ec.(3), obtenemos que

$$4{,}0\frac{d^2u}{dx^2} - sU = 10\sin(2{,}0\pi x) - 6{,}0\sin(4{,}0\pi x). \qquad (4)$$

Tomando la transformada de Laplace de las condiciones $u(0,t) = u(3{,}0,t) = 0$ , tenemos que

$$\mathcal{L}\{u(0,t)\} = \mathcal{L}\{u(3{,}0,t)\} = 0,$$

Utilizando los métodos usuales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (Campbell & Haberman 1998) , vemos que la solución de la Ec.(4) es

$$U(0,s) = \frac{10\sin(2{,}0\pi x)}{s+16\pi^2} - \frac{6{,}0\sin(4{,}0\pi x)}{s+64\pi^2}.$$

Así, al tomar la inversa de la transformada  de Laplace, obtenemos que

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{u(x,s)\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s+16\pi^2}\right\}\sin(2{,}0\pi x) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s+64\pi^2}\right\}\sin(4{,}0\pi x) \quad (5)$$

$$= 10e^{-16\pi^2 t}\sin(2{,}0\pi x) - 6{,}0e^{-64\pi^2 t}\sin(4{,}0\pi x)$$

Aunque existen otros métodos para la solución de EDP, como lo son el método de separación de variables y el método de variable compleja; el método de la  transformada de Laplace se destaca de los demás por tres aspectos entre otros:

a) Transforma ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.
b) Cualesquiera que sean las condiciones iniciales dadas en el problema,  automáticamente se incorporan en el problema algebraico de modo que no se necesita hacer ninguna consideración especial sobre ellas.
c) Finalmente, el uso de las tablas de transformadas de Laplace pueden reducir el trabajo de obtener soluciones lo mismo que las tablas de integrales reducen el trabajo de integración.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Al utilizar cualquier método de solución de EDP totalmente diferentes, debemos llegar a los mismos resultados. La Ec.(5), nos muestra la evolución temporal de la temperatura conforme aumenta el tiempo, llevando al sistema al cabo de un tiempo (no muy prolongado) al equilibrio térmico, esto es, a temperatura cero, esta situación es presentada gráficamente en la Fig. 2.  Este comportamiento era el de esperarse, dada la dependencia de la solución con el tiempo.

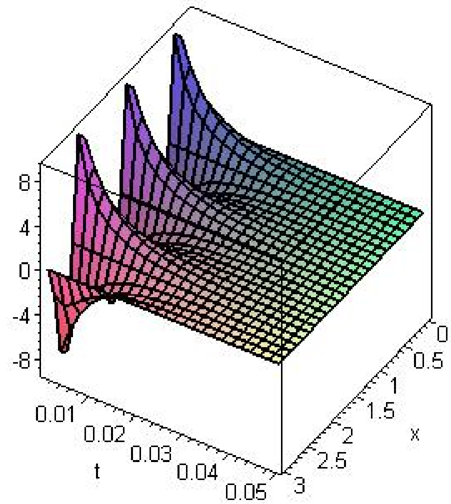


Fig. 2. Comportamiento gráfico de la Ec.(5), referente a la solución del problema con $0{,}010s \le t \le 0{,}050s$ y $0 \le x \le 3{,}0$.

No obstante, mediante la utilización apropiada de algunos métodos de solución numérica de EDP, particularmente del tipo parabólico, es posible comparar tanto la solución exacta como la numérica con un alto grado de precisión para diferentes parámetros de iteración [Bracho 2003]. El Cuadro 1, nos muestra los resultados obtenidos mediante la aplicación del Método Explícito (ME) (Nakamura 1992) para las condiciones tanto iniciales como en la frontera planteadas al inicio del problema. Los cálculos numéricos fueron obtenidos mediante la elaboración de un programa ejecutable escrito en lenguajes de alto nivel tanto como Fortran 90 (Ellis et al., 1994) y C++ (Gottfried 1999; Dietel & Dietel 2003).

Cuadro 1. Resultados numéricos obtenidos por el ME (Método Explícito) aplicado a la Ec.(5) con condiciones en la frontera dadas. Los parámetros utilizados fueron $t_{max} = 0{,}050s$, $k = 0{,}000500$ y $an = 9{,}90$ respectivamente (Bracho 2003).

| **Interacción** | **Numérica ($10^{-3}$)** | **Exacta ($10^{-3}$)** |
|---|---|---|
| 1 | 2,451000 | 2,188970 |
| 2 | 3,965972 | 3,541225 |
| 3 | 3,965994 | 3,541225 |
| 4 | 2,451166 | 1,885970 |
| 5 | 1,023405 | 1,255160 |
| 6 | - 2,450971 | - 2,188598 |
| 7 | - 3,965829 | - 3,541225 |
| 8 | - 3,965852 | - 3,541224 |
| 9 | - 2,451037 | - 2,188595 |
| 10 | 0,000000 | 0,000000 |

Observando este cuadro vemos una correspondencia relativamente buena entre ambas soluciones, esto es la numérica con la exacta. Esta situación se aprecia mejor en la Fig. 3.

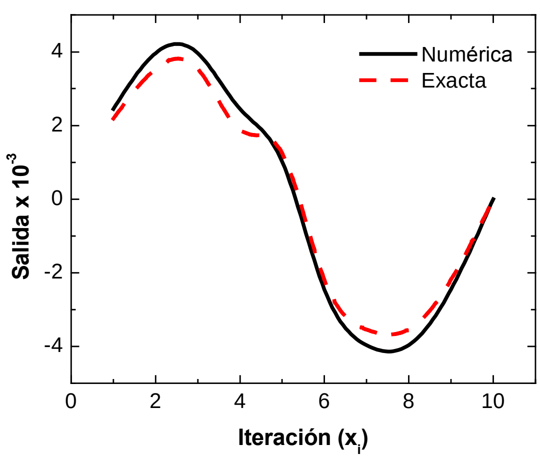


Fig. 3. Comportamiento de la solución numérica con la exacta dada por la Ec.(5), obtenidas por el ME, para la situación en que $t_{max} = 0{,}050s$, manteniendo $k$ y $an$ constantes.

Entre tanto, al disminuir el tiempo de iteración en $t_{max}$, manteniendo los demás parámetros constantes, demostramos que tanto la solución numérica como la exacta, se aproximan una de la otra con sorprendente rapidez. En esta situación particular, fue comparada ambas soluciones mediante la aplicación de otros métodos de soluciones de EDP, como los son, el Método Implícito (MI) (con parámetro de peso $w$ = 1,0) y el Método de Crank – Nicolson (MCN) (con parámetro de peso $w$ = 0,50) respectivamente (Ducheteau & Zachmann 1988). En el Cuadro 2 y la Figura 4, nos ilustran los resultados obtenidos una vez ejecutado el programa. En esta nueva situación, observamos claramente, que la solución numérica se aproxima a la exacta.

Cuadro 2. Resultados numéricos obtenidos por el MI para w = 1 y el MCM aplicado, a la Ec.(5) con condiciones en la frontera dadas. Los parámetros utilizados fueron $t_{\max} = 0{,}0010s$, $k = 0{,}000500$ y $an = 9{,}90$ respectivamente (Bracho 2003).

| Interacción | Solución Numérica | | Sol. Exacta |
|---|---|---|---|
| | MI | MCN | |
| 1 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 2 | 5,378988 | 5,430029 | 5,192573 |
| 3 | 8,543746 | 8,310381 | 8,310383 |
| 4 | 5,225266 | 5,617301 | 6,695001 |
| 5 | - 2,121825 | - 1,112895 | - 1,747332 |
| 6 | - 7,984964 | - 7,087161 | - 6,695000 |
| 7 | - 8,395942 | - 8,308293 | - 8,310379 |
| 8 | - 4,809391 | - 5,429241 | - 5,225822 |
| 9 | - 1,404453 | - 2,002520 | - 1,650277 |
| 10 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |

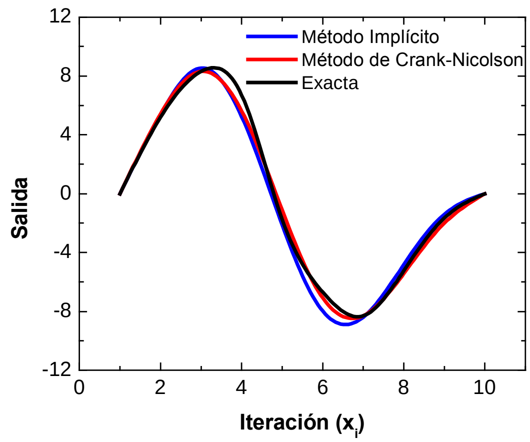


Fig. 4. Gráfico que muestra el comportamiento de la solución numérica con la exacta dada por la Ec.(5), obtenidas tanto por el MI, como por el MCN, para la situación en que $t_{\max} = 0{,}0010s$ , manteniendo $k$ y $an$ constantes.

## CONCLUSIONES

Al estudiar los métodos de soluciones numéricas de las EDP del tipo parabólicas, vemos que se pueden usar en cierta medida los llamados métodos de diferencias finitas (Nakamura 1992). Estos métodos pueden ser utilizados sin lugar alguna tanto a problemas tanto de una como de dos dimensiones. Tanto los Métodos Explícito, Implícito como el de Crank – Nicolson, presentan tasas de convergencia relativamente buenas. Es decir, tal como lo pedemos apreciar en las Figs. 3 y 4; conforme el tiempo de cálculo va disminuyendo, mostramos que tanto la solución numérica como la exacta van convergiendo a un mismo valor, indicándonos con esto un comportamiento incondicionalmente estable, presentando prácticamente la superposición de ambos métodos, mostrándonos sin lugar a dudas la altísima estabilidad de ambos métodos.

## REFERENCIAS

Bracho, G. J. 2003. Ecuaciones de Transporte con Valores en la Frontera Aplicadas a la Física. Vicerrectoría de Investigación y Postgrado. Universidad de Panamá.

Budak, B. M., A. A. Samarski & A. N. Tijonov. 1984. Problemas de la Física Matemática. Vol. 2. Editorial Mir. Moscú.

Burden, R. L. & J. D. Faires. 1998. Análisis Numérico. Sexta Edición. Editorial International Thompson. México.

Campbell, S. L. & R. Haberman. 1998. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor en la Frontera. Editorial Mc.Graw-Hill. México.

Dietel, H. M. & P. J. Dintel. 2003. Cómo Programar en C++. Cuarta Edición. Editorial Pearson Educación. México.

Duchateau, P. & D. W. Zachmann. 1988. Teoría y Problemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Editorial McGraw-Hill. México.

Ellis, T. M. T., I. V. Philips & T. M. Lahey. 1994. Fortran 90 Programming. Addison & Wesley. China.

Fox, R. W. & A. T. McDonalds. 1983. Introducción a la Mecánica de Fluidos. Segunda Edición. Editorial Interamericanda, S. A. México.

Franco, D. P. 1995. La Exploración del Agua Subterránea. Un Nuevo Enfoque. Editorial Científico – Técnica. Cuba.

Godunov, S. K. 1984. Ecuaciones de la Física Matemática. Segunda Edición. Editorial Mir. Moscú.

Gottfried, B. 1999. Programación en C. Segunda Edición. Editorial McGraw-Hill. México.

Nakamura, S. 1992. Métodos Numéricos Aplicados con Software. Prentice-Hall. México.

Smith, G. D. 1978. Numerical Solutions of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Segunda Edición. Oxford University Press. New York.

Spiegel, M. 1975. Matemáticas Superiores para Ingenieros y Científicos. Editorial McGraw-Hill. Colombia.

___________ 1979. Teoría y Problemas de Transformada de Laplace. Editorial McGraw-Hill. Colombia.

***Recibido noviembre de 2003, aceptado diciembre de 2004.***